线性方程组的解空间. 一般线性空间.

8大公理是为了保证抽象的线性空间有好的性质与结构

例: $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in V$. $\exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_m) \neq 0$ s.t. $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_m = \theta$. 则
$\exists i$ s.t. $\alpha_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\alpha_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\alpha_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i}\alpha_n$

性质: 1) 零向量唯一
2) 负向量唯一
3) $0 \cdot \alpha = \theta$, $(-1)\alpha = -\alpha$, $\lambda\theta = \theta$
4) $\lambda\alpha = \theta \Leftrightarrow \lambda = 0$ 或 $\alpha = \theta$

Pf 3). $0\alpha = (0+0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha \Rightarrow 0\alpha = \theta$
$\alpha + (-1)\alpha = 1 \cdot \alpha + (-1)\alpha = (1-1)\alpha = 0\alpha = \theta$
$\lambda\theta = \lambda \cdot (0\alpha) = (\lambda 0)\alpha = 0\alpha = \theta$

例: 1) F^n
2) $E_n :=$ n 元一次方程全体
3) $F_n[x] :=$ F 上次数不超过 n 的多项式全体
4) $F^{m\times n}$
5) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$.
6) $F = \mathbb{R}$, $V := \mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$, $r_1 \oplus r_2 := r_1 \cdot r_2$, $\lambda \circ \alpha := \alpha^\lambda$
7) $C_n := \{a_0 + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + \cdots + a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta) \mid a_i, b_i \in F\}$
8) $C[a,b] :=$ $[a,b]$ 上的连续函数全体.

反例: 1) $F = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^+$ 通常 $+$. $\times$
2) $F = \mathbb{R}$, $v_0 \in F^n$, $V := \{v \in F^n \mid v \not\parallel v_0\}$ 通常 $+$ $\times$.
3) $F = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{R}_n[x]$ 通常 $+$. $\times$

注: 一般线性空间没有长度夹角等几何概念!

定义：设 V 为 F-线性空间，$W\subseteq V$ 非空子集，若

1) $\forall \alpha,\beta\in W \Rightarrow \alpha+\beta\in W$
2) $\forall \lambda\in F, \forall \alpha\in W \Rightarrow \lambda\alpha\in W$

则称 W 为 V 的**子空间**

例：1). $W=\{0\}$ or $W=V$,

2). $\forall S\subseteq V \Rightarrow \langle S\rangle := \{\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n \mid \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in F, \alpha_1,\cdots,\alpha_n\in S\}$

S：生成元　　$\langle S\rangle$：V 的生成子空间

3) $F_n[x], C_n \subseteq C[a,b]$

4) $W=\{p\in F_n[x] \mid p(x)=p(-x)\}\subseteq F_n[x]$

5) $\forall A\in F^{n\times n}$. $W:=\{X\in F^{n\times n} \mid AX=0\}\subseteq F^{n\times n}$

证：⋯⋯

§ 一般线性空间的理论.

将关于数组空间的结论平行推广（证明只涉及加法与数乘）

V 加法 数乘 → 线性组合 → 线性相关(无关)，等价

线性组合 ↓ $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\alpha_i := \lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m$

线性相关(无关) ↓ 极大无关组 → 秩，基，维数 → 扩充基

基 ↓ 坐标

维数 → 过渡矩阵

定理 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ 不全为零的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ s.t. $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\alpha_i=\theta$.

$\Longleftrightarrow$ $\exists\, i$ & $\lambda_j\ (j\neq i)$ s.t. $\alpha_i=\sum_{j\neq i}\lambda_i\alpha_i$

$\Longleftrightarrow$ $\alpha_i\in\langle\alpha_1,\cdots,\hat{\alpha_i},\cdots,\alpha_m\rangle$

$\Longleftrightarrow$ $\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_m\rangle=\langle\alpha_1,\cdots,\hat{\alpha_i},\cdots,\alpha_m\rangle$

~~$\Longleftrightarrow$ $Ax=0$ 有非零解~~

$(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 不再构成矩阵！

定理 若 $S_1\subseteq S$，则

- S_1 线性相关 $\Rightarrow$ S 线性相关
- S 线性无关 $\Rightarrow$ S_1 线性无关.

定义(极大无关组):

定理: S_1 为 S 的极大无关组 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} S \text{ 可由 } S_1 \text{ 线性表示} \\ S_1 \text{ 线性无关} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} S\sim S_1 \\ S_1 \text{ 线性无关} \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \langle S\rangle=\langle S_1\rangle \\ S_1 \text{ 线性无关} \end{cases}$

例: $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x\}$ 为 $\{1,\cos x,\sin x,\cos^2 x,\sin^2 x,\cos 2x,\sin 2x\}$ 的一个极大无关组.

定义(等价):

定理: 两等价线性无关的向量组个数相同

定义(秩)：rank(S)，r(S)

例：$T \subseteq S \subseteq V$. $\#S = s$，$\#T = t$，则

$$\mathrm{rank}(S) = r \Rightarrow \mathrm{rank}(T) \geq r + t - s.$$

S_1 极大无关组 $\Rightarrow$ $S_1 \cap T$ 为 T 的无关组

$\Rightarrow \mathrm{rank}(T) \geq \mathrm{rank}(S_1 \cap T) \geq r + t - s$

定理：V = 线性空间，$S, T \subseteq V$

(1). S 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(S) = \#S$

(2). S 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}(S) < \#S$

(3). T 可由 S 线性表示 $\Rightarrow$ $\mathrm{rank}(T) \leq \mathrm{rank}(S)$

(4). $T \sim S$ $\Rightarrow$ $\mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}(S)$

(5). T 可由 S 线性表示 且 T 线性无关 $\Rightarrow \#T \leq \#S$.

定义：· V 为 F-线性空间，若 $S \subseteq V$ 线性无关且 $V = \langle S \rangle$，

称 S 为 V 的一组基，

· 若 S 为有限集，则称 V 为有限维空间，否则称为

无限维线性空间.

· 若 $S = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 为 V 的基，则 $\forall \alpha \in V$ $\exists! (\lambda_1 \cdots \lambda_n)$ s.t.

$$\alpha = \sum_{\alpha_i \in S} \lambda_i \alpha_i$$

称 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 为 α 在 S 下的坐标.

本课程仅讨论有限维线性空间.

例：$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.　$F = \mathbb{R}$，$\{1, i\}$ 为 $\mathbb{C}$ 的一组基.

例：$\dim_F F[x] = \infty$.　$S = \{1, x, x^2, \cdots\}$ 为 $F[x]$ 的一组基.

④ 例：$\dim_F F^{m \times n} = mn$　$S = \left\{ E_{ij} \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \right\}$ 为 $F^{m \times n}$ 的一组基.

定理：(1) n维空间中的任意 n+1 个向量线性相关

(2) n维空间中的任意 n 个线性无关的向量组为一组基.

(3) n维空间中的任意线性无关的向量组可扩充为一组基.

基变换公式

$$F_{n-1}[x] = \langle 1, x, \cdots, x^{n-1} \rangle = \langle 1, x+1, (x+1)^2, \cdots, (x+1)^{n-1} \rangle$$

$$\left(1, x+1, (x+1)^2, \cdots (x+1)^{n-1}\right) = \left(1, x, \cdots, x^{n-1}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \binom{n-1}{0} \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \binom{n-1}{1} \\ 0 & 0 & 1 & & \binom{n-1}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix}}_{= T}$$

$$T^{-1} = ?$$